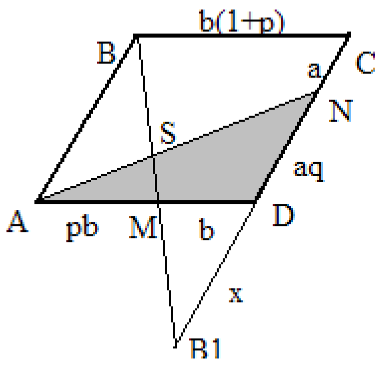
Задача 1. *Дан параллелограмм ABCD. Точка M делит отрезок AD в отношении p , а точка N делит отрезок DC в отношении q. Прямые BM и AN пересекаются в точке S. Вычислите отношение AS:SN.*



Решение: $\frac{AM}{MD} = p \Rightarrow$ если MD=b, то AM=pb; $\frac{DN}{NC} = q \Rightarrow$ если NC = a, то DN = aq.

Пусть B_1 - точка пересечения прямых BM и CD.

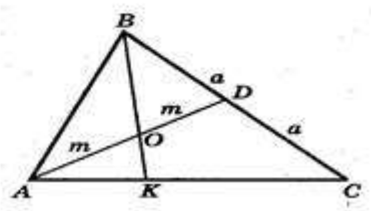
$\Delta MB_1D \sim \Delta BB_1C$, тогда $\frac{BC}{MD} = \frac{CB_1}{DB_1}$;

$\frac{b(1+p)}{b} = \frac{a(1+q)+x}{x}$; $1+p = \frac{a(1+q)}{x} + 1$; $x = \frac{a(1+q)}{p}$.

Прямая BB_1 пересекает две стороны и продолжение третьей треугольника AND. По теореме Менелая

$\frac{AS}{SN} \cdot \frac{NB_1}{B_1D} \cdot \frac{DM}{MA} = 1$, $\frac{AS}{SN} \cdot \frac{aq + \frac{a(1+q)}{p}}{\frac{a(1+q)}{p}} \cdot \frac{1}{p} = 1$, откуда $\frac{AS}{SN} = \frac{p(1+q)}{pq+q+1}$.

Задача №2.



Условие:

В треугольнике ABC AD – медиана, точка O – середина медианы. Прямая BO пересекает сторону AC в точке К.

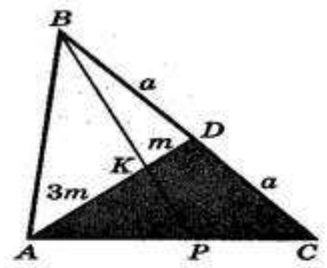
Найти:

АК:КС=?:?

Решение: Пусть BD = DC = a, AO = OD = m. Прямая BK пересекает две стороны и продолжение третьей стороны треугольника ADC. По теореме Менелая получаем

$$\frac{AK}{KC} * \frac{2a}{a} * \frac{m}{m} = 1, \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$$

Задача №3



Условие:

Пусть AD – медиана треугольника ABC. На стороне AD взята точка K так, что AK : KD = 3 : 1. Прямая BK разбивает треугольник ABC на два.

Найти:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{BPC}} = \frac{?}{?}$$

Решение: Пусть AD = DC = a, KD = m, тогда AK = 3m. Пусть P – точка пересечения прямой BK со стороной AC. Необходимо найти

отношение $\frac{SABP}{SBPC}$. Так как треугольники ABP и PBC имеют равные высоты, проведенные из вершины B, то $\frac{S_{ABP}}{S_{BPC}} = \frac{AP}{PC}$.

По теореме Менелая для треугольника ADC и секущей PB имеем

$$\frac{AP}{PC}*\frac{CB}{BD}*\frac{DK}{KA}=1, \frac{AP}{PC}*\frac{2a}{a}*\frac{m}{3m}=1, \frac{AP}{PC}=\frac{3}{2}.$$

$$\frac{SABP}{SBPC}=\frac{3}{2}$$

.

4.Условие

Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причём $AM : MB = 1 : 2$, $AN : NC = 3 : 2$. Прямая MN пересекает продолжение стороны BC в точке F. Найдите $CF : BC$.

Подсказка

Проведите через вершину A прямую, параллельную стороне BC, и рассмотрите две пары подобных треугольников.

Решение 1

Через точку A проведём прямую, параллельную BC. Пусть T – точка её пересечения с прямой MN. Обозначим $CF = a$.

Из подобия треугольников ANT и CNF (коэффициент 1,5) находим, что $AT = 1{,}5CF = 1{,}5a$, а из подобия треугольников AMT и BMF (коэффициент 0,5) – $BF = 2AT = 3a$. Тогда $BC = BF - CF = 2a$. Следовательно, $CF : BC = a : 2a$.

Решение 2

Разместим в точках A, B, F массы 2, 1, m так, чтобы центр масс точек A, B, F оказался в точке N. Тогда центр масс точек A и B находится в точке M, а центр масс точек B и F находится на пересечении прямых BF и AN, то есть в точке C. Значит, $1 + m = 3$, то есть $m = 2$. Отсюда $FC : BC = 1:2$.

Также доступны документы в формате TeX

Ответ

1 : 2.