Теорема Вариньона
и её применение к решению задач.

Оглавление.

Основная часть.

1. Пьер Вариньон и его теорема.

1. 1. Историческая справка.

Окружающий нас мир – это мир геометрии, чистой, истинной, безупречной в наших глазах. Всё вокруг – геометрия.

Ле Карбюзье

Пьер Вариньон, руководивший «Журналом учёных» в Париже и написавший учебник по элементарной геометрии, по-видимому, первым заострил внимание на, казалось бы, довольно очевидном факте: *середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.* [15, с. 45]

Пьер Вариньон (1654 — 22.12.1722), французский механик и математик, родился в г. Каенне во Франции. Изучал философию и математику. Работал профессором математики в коллеже Мазарини с 1688 г., с 1704 г. – в Коллеже де Франс, член Парижской Академии наук с 1688 г. Труды Вариньона посвящены теоретической механике, анализу бесконечно малых, геометрии, гидромеханике. Наибольшее значение имеют работы Вариньона по геометрической статике. В 1687 г. в работе «Проект новой механики...» Вариньон дал чёткую формулировку закона параллелограмма сил, развил понятие момента сил и вывел, так называемую, теорему Вариньона. [www.math.ru]

1. 2. Доказательство теоремы Вариньона.

Теорема Вариньона вытекает из теоремы о средней линии треугольника (средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны) [1, с. 146] и гласит: *середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Стороны этого параллелограмма параллельны диагоналям четырёхугольника, а их длины равны половинам длин диагоналей.*

Четырёхугольник — это многоугольник, содержащий четыре вершины и четыре стороны (*многоугольник* – простая замкнутая ломаная). Различают выпуклые и невыпуклые четырёхугольники.

Рассмотрим доказательство теоремы для выпуклого четырёхугольника.

Четырёхугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. [1, с.99]

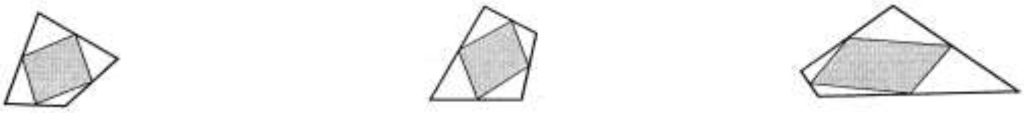


рис. 1

Доказательство:

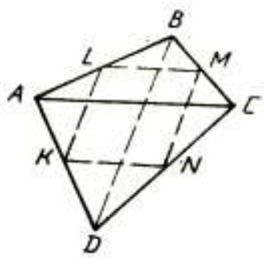


рис. 2

1) K и L – середины сторон AD и AB, значит KL – средняя линия треугольника
ABD, поэтому отрезок KL параллелен диагонали BD и равен её половине.

2) M и N – середины сторон BC и CD, значит MN – средняя линия треугольника *BDC*, поэтому отрезок MN параллелен диагонали BD и равен её половине.

3) Таким образом, $MN \parallel KL$ *и* $KL = MN$, значит четырехугольник *KLMN* – параллелограмм по признаку. Теорема доказана.

Следствие. В любом четырёхугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, делятся точкой пересечения пополам.

Действительно, в этих отрезках можно увидеть диагонали параллелограмма, а в параллелограмме диагонали делятся точкой пересечения пополам (эта точка – центр симметрии параллелограмма).

Заметим, что:

1) Если ABCD – прямоугольник, то KLMN – ромб;

2) Если ABCD - ромб, то KLMN – прямоугольник;

3) Если ABCD - квадрат, то KLMN - квадрат;

4) Если ABCD – равнобедренная трапеция, то KLMN - ромб.

Однако обратные утверждения нельзя считать верными.

Справедливость теоремы Вариньона не зависит от выпуклости четырёхугольника. Теорема Вариньона и следствие из неё остаются верными и для невыпуклого четырехугольника, и для самопересекающейся четырехугольной замкнутой ломаной (рис. 3, 4); в последнем случае может оказаться, что параллелограмм *KLMN* «вырожденный» - точки *K, L, M, N* лежат на одной прямой) (доказательство аналогично рассмотренному выше).

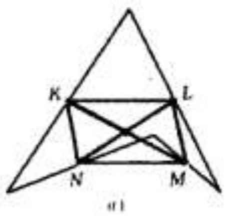


рис. 3

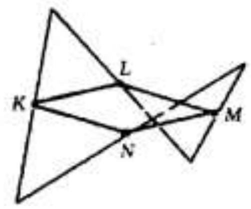


рис. 4

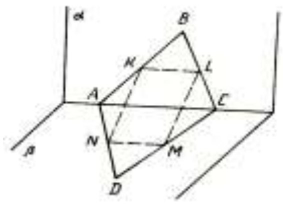


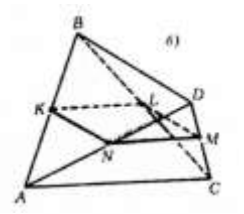
рис. 5

Оказывается, что даже не обязательно, чтобы исходный четырёхугольник был плоский, т. е. его вершины не обязаны попадать в одну плоскость, а теорема Вариньона всё равно верна! (рис. 5). Четырёхугольник, вершины которого не лежат в одной плоскости, называют пространственным.

Пространственный четырёхугольник можно получить, вырезав из бумаги четырёхугольник ABCD и согнув его по диагонали под некоторым углом. при этом ясно, что средние линии KL и MN треугольников ABC и ADC остаются по-прежнему их средними линиями и будут параллельны отрезку AC и равны AC/2 (здесь используется тот факт, что для пространства остаётся верным основное свойство параллельных прямых: *если две прямые KL и MN параллельны третьей прямой AC, то KL и MN лежат в одной плоскости и параллельны между собой*).

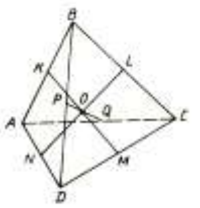
Таким образом, точки K, L, M, N – вершины параллелограмма; тем самым отрезки KM и LN пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Вместо четырехугольника здесь можно говорить о тетраэдре - треугольной пирамиде *ABCD:* середины *K, L, M, N* его ребер *AB, AC, CD* и *DA* всегда лежат в одной плоскости. Разрезав тетраэдр по этой плоскости (рис. 6), получается параллелограмм KLMN, две стороны которого параллельны ребру *AC* и равны AC/2, а две другие - параллельны ребру *BD* и равны BD/2.



Такой же параллелограмм – «среднее сечение» тетраэдра – можно построить и для других пар противоположных рёбер. Каждые два из этих трёх параллелограммов имеют общую диагональ. При этом середины диагоналей совпадают. [5, с. 47]

рис. 6



Таким образом, получаем интересное свойство тетраэдра: *в тетраэдре 3 отрезка, соединяющие середины противоположных рёбер, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам (на чертеже отрезки KM, LN и PQ).*

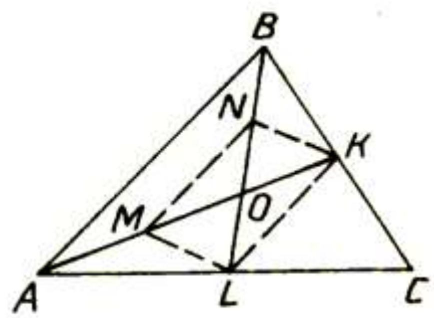
рис. 7

Итак, мы показали, что теорема Вариньона верна для выпуклого, невыпуклого, пространственного четырёхугольников, а также для самопересекающейся четырехугольной замкнутой ломаной и тетраэдра.

2. Применение теоремы Вариньона.

2. 1. Применение теоремы Вариньона к доказательству основного свойства медиан треугольника.

Продемонстрируем применение теоремы Вариньона к доказательству теоремы об основном свойстве медиан треугольника.



Теорема.

Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.

рис. 8а

Доказательство: проведём две медианы *AK* и *BL* треугольника *ABC*. Пусть *O* – точка их пересечения. Середины сторон невыпуклого четырехугольника *ACBO* – точки *K, L, M* и *N* (рис. 8а) – вершины параллелограмма, причем точкой пересечения его диагоналей *KM* и *LN* для этой конфигурации будет точка пересечения медиан О. Итак, $AM = MO = OK$ и $BN = NO = OL$, т.е. точка *O* делит каждую из медиан AK и BL в отношении 2:1.

Аналогично доказывается для медианы, проведённой из вершины С.

Для сравнения рассмотрим доказательство этой теоремы, использованное в учебнике геометрии Атанасяна Л.С.:[1, с. 147].

Доказательство: рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 8б). Обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 и проведём среднюю линию A_1B_1 этого треугольника. Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и

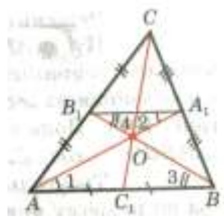


рис. 8б

$\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и A_1B_1 секущими AA_1 и BB_1 . Следовательно, треугольники AOB и A_1OB_1 подобны по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны: $\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Но $AB=2A_1B_1$, поэтому $AO=2A_1O$ и $BO=2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2:1 считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O. Теорема доказана.

На наш взгляд, доказательство с помощью теоремы Вариньона проще.

2. 2. Применение теоремы Вариньона к решению задач.

Рассмотрим применение теоремы Вариньона к решению планиметрических задач повышенной трудности. Дело в том, что планиметрические задачи на олимпиадах встречаются значительно чаще.

Мы будем называть параллелограмм KLMN *параллелограммом Вариньона*, а отрезки KM и LN, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника ABCD - *средними линиями* этого четырёхугольника.

Задача 1. В выпуклом пятиугольнике ABCDE середины сторон AB и CD, BC и DE соединены отрезками. K, L – середины этих отрезков. Доказать, что отрезок KL параллелен пятой стороне AE и составляет ¼ от неё.

Решение: отрежем четырёхугольник ABCD и пусть P-середина AD, тогда по теореме Вариньона $A_1B_1C_1P$ – параллелограмм, A_1C_1 – его диагональ и K – середина A_1C_1, значит, K – середина и второй диагонали параллелограмма B_1P.Значит, KL – средняя линия треугольника PB_1D_1, поэтому $KL \| PD_1$ и $KL=1/2\ PD_1$, но PD_1 – средняя линия треугольника ADE, значит, $PD1 \| AE$ и $PD_1=1/2AE$, поэтому $KL \| AE$ и $KL=1/4\ AE$.

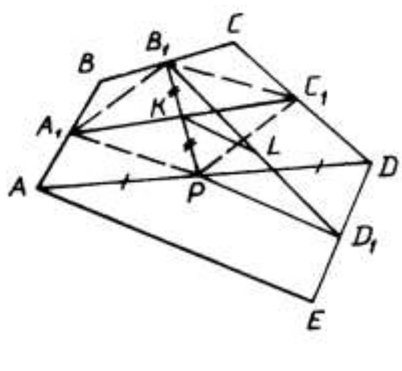


рис. 9

Задача 2. Верно ли, что можно составить треугольник из любой средней линии треугольника и отрезков, вдвое меньших его диагоналей?

Решение: верно, так как параллелограмм Вариньона существует для любого выпуклого четырёхугольника. Например, условию задачи удовлетворяют треугольники KLM и LMN на рис. 10.

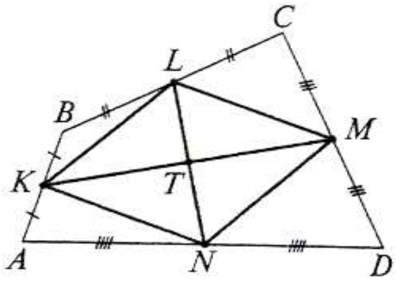


рис. 10

Задача 3. Средние линии четырёхугольника ABCD равны a и b, а угол между ними 60˚. Найдите диагонали четырёхугольника.

Решение: пусть KM=a, LN=b, $\angle LTM = 60°$ (рис. 10). Тогда NM=$\frac{a}{2}$, а LT=$\frac{b}{2}$.

Из треугольника LTM по теореме косинусов $LM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos 60°$. Но LM=$\frac{1}{2}$ BD, поэтому $\frac{BD^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{4}$, откуда BD=$\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. Аналогично из треугольника TNM найдём MN, потом вычислим AC: AC=$\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$; $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

Задача 4. Докажите, что сумма квадратов диагоналей четырёхугольника в два раза больше суммы квадратов его средних линий.

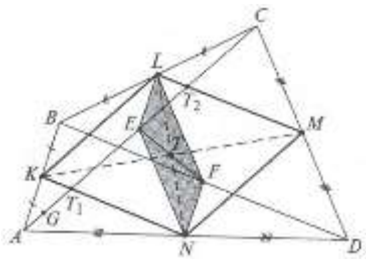


рис. 11

Доказательство: в параллелограмме Вариньона, как и в любом другом параллелограмме, сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, т.е. $KM^2 + LN^2 = 2(KL^2 + LM^2)$. Учитывая, что KL=1/2 AC и LM= 1/2 BD (рис. 11), получим: $KM^2+LN^2=1/2(AC^2+BD^2)$, $AC^2+BD^2=2(KM^2+LN^2)$.

Задача 5. Докажите, что площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади четырёхугольника ABCD.

Доказательство:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\angle 1, S_{KLMN} = KL \cdot KN \cdot \sin\angle 2$ (рис. 12).

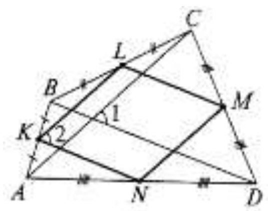


рис. 12

Учитывая, что $\angle 1 = \angle 2$, KL=1/2 AC и KN=1/2 BD, получим:

$S_{KLMN} = \frac{1}{4} AC \cdot BD \cdot \sin\angle 1 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Задача 6. Докажите, что все четырёхугольники, имеющие общие середины сторон, равновелики.

Доказательство: действительно, для всех таких четырёхугольников определён один и тот же параллелограмм Вариньона. Его площадь равна половине площади каждого из исходных четырёхугольников (задача 5), тем самым их равновеликость доказана.

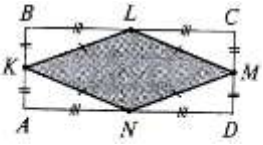


рис. 13

Задача 7. Докажите, что если диагонали четырёхугольника равны, то его площадь равна произведению средних линий.

Доказательство: в случае равенства диагоналей AC и BD параллелограмм Вариньона KLMN является ромбом (рис. 13), а площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$S_{KLMN} = \frac{1}{2} KM \cdot LN$, тогда $S_{ABCD} = 2S_{KLMN} = KM \cdot LN$.

Задача 8. Диагонали четырёхугольника ABCD равны d_1 и d_2, а средние линии равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника.

Решение: из условия задачи следует, что в параллелограмме Вариньона диагонали KM и LN равны (рис. 12). Значит, KLMN – прямоугольник и S_{KLMN}=1/2 d_1d_2, а с другой стороны, S_{KLMN}=1/2 S_{ABCD}, следовательно, S_{ABCD}=1/2d_1d_2.

Ответ: S_{ABCD}=1/2d_1d_2.

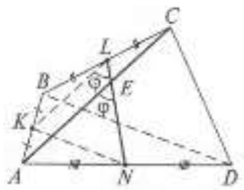


рис. 14

Задача 9. Докажите, что площадь четырёхугольника равна произведению средней линии на одну из диагоналей и на синус угла между ними.

Доказательство: согласно рис. 14 необходимо доказать, что $S_{ABCD} = AC \cdot LN \cdot \sin\varphi$. Треугольник KLN представляет собой половину параллелограмма Вариньона. $S_{KLN} = \frac{1}{2} KL \cdot LN \cdot \sin\varphi$ $(\angle AEN = \angle KLN = \varphi)$. Так как KL=1/2AC, то $S_{KLN} = \frac{1}{4} AC \cdot LN \cdot \sin\varphi$, значит, $S_{KLMN} = \frac{1}{2} AC \cdot LN \cdot \sin\varphi$, а с другой стороны, $S_{KLMN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (см. задачу 8), тогда $S_{ABCD} = AC \cdot LN \cdot \sin\varphi$.

Задача 10. Докажите, что сумма квадратов сторон четырёхугольника равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учетверённым квадратом отрезка, соединяющего середину его диагоналей.

Доказательство: согласно рис. 11 надо доказать, что $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$. Для медианы ET треугольника ELN имеем: $ET^2 = \frac{EF^2}{4} = \frac{2(EL^2 + EN^2) - LN^2}{4}$, где $EL = \frac{1}{2} \cdot AB$, $EN = \frac{1}{2} \cdot CD$, откуда

$LN^2 = \dfrac{AB^2 + CD^2}{2} - EF^2$. Аналогично, выразив медиану FT треугольника KFM и учитывая, что $KF = \dfrac{1}{2} \cdot AD,\ FM = \dfrac{1}{2} \cdot BC$ и $FT = \dfrac{1}{2} \cdot EF$, получим: $KM^2 = \dfrac{AD^2 + BC^2}{2} - EF^2$.

Кроме того, $LN^2 + KM^2 = \dfrac{AC^2 + BD^2}{2}$ (задача 7).

Итак, получаем: $\dfrac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2}{2} - 2EF^2 = \dfrac{AC^2 + BD^2}{2}$, откуда:

$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4EF^2$.

Задача 11. Постройте трапецию по диагоналям, одному из углов и отрезку, соединяющему середины оснований.

Решение: пусть в трапеции ABCD, которую необходимо построить, известны длины диагоналей AC и BD, отрезка LN и величина угла A (рис. 15).

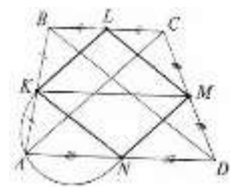


рис. 15

Поскольку $KL = \dfrac{1}{2}AC$ и $KN = \dfrac{1}{2}BD$, нетрудно построить по трём сторонам треугольник KLN. Далее построим его до параллелограмма Вариньона. Затем на отрезке KN построим сегмент, вмещающий угол A, и проведём через точку N параллельно KM прямую, она пересечёт сегмент в точке A. Дальнейшее построение очевидно.

В ходе работы мы прорешали более двадцати пяти задач, формулировки и решения наиболее интересных из них дополнительно приведены в приложении. Мы убедились в том, что теорема Вариньона помогает красиво, оригинально решать задачи, открывать и доказывать новые свойства четырёхугольников.

Заключение.

В процессе исследования мы узнали о Пьере Вариньоне, его достижениях, рассмотрели доказательство его теоремы для различных видов четырёхугольников; показали, что справедливость теоремы не зависит от выпуклости четырёхугольника, продемонстрировали применение теоремы; убедились в том, что параллелограмм Вариньона – надёжный помощник в решении геометрических задач различной сложности, узнали много нового и интересного о свойствах геометрических фигур. Таким образом, мы считаем, что цель работы достигнута.

Наше исследование поможет систематизировать и углубить теоретические и практические знания учащихся по геометрии. Работа перспективна, т.к. геометрия не остановилась в своём развитии, а играет всё большую роль в познании мира. В дальнейшем мы планируем поработать над утверждениями, обратными теореме Вариньона для различных видов четырёхугольников.

Список использованной литературы.

1. Атанасян Л.С. Геометрия, 7-9: учебник. – М.: Просвещение, 2002. – 384 с.

2. Атанасян Л.С. Геометрия, 10-11: учебник. – М.: Просвещение, 2003. – 206 с.

3. Атанасян Л.С. Геометрия. Доп. главы к школьному учебнику 8 кл.: учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. – М.: Вита-Пресс, 2002. – 205 с.

4. Атанасян Л.С. Геометрия. Доп. главы к школьному учебнику 9 кл.: учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. – М.: Вита-Пресс, 2002. – 198 с.
5. Вагутен В.Н. Средние линии// Журнал «Квант». – 1989. – № 6. – с. 46-51.
6. Генденштейн Л.Э., Ершова А.П. Наглядный справочник по геометрии для 7-11 кл. – Москва-Харьков: Развивающее обучение, 1996. – 96 с.
7. Гусев В.А. Сборник задач по геометрии. – М: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2005. – 480 с.
8. Глейзер Г.И. История математики в школе, 9-10 кл. – М.: Просвещение, 1983. –351 с.
9. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии. 7-11 кл. – СПб: АКАЦИЯ, 1995. – 624 с.: ил.
10. Ильин В. Применение теоремы о средней линии треугольника к решению задач// Газета «Математика». Объединение педагогических изданий «1 сентября». – 1998. – № 48. – с. 11-12.
11. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 1997. – 608 с.
12. Куркин Е.Б., Спивак А.В., Цветков В.И. Числа и фигуры математики. Новая школьная энциклопедия. – М: Мир книги, 2005. – 675 с.
13. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. Математическая шкатулка. – М.: Дрофа, 2006. – 270 с.: ил.
14. Фарков А.В. Учимся решать олимпиадные задачи. Геометрия. 5-11 кл. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 128 с.: ил.
15. Филипповский Г.Б. Параллелограмм Вариньона решает задачи// Журнал «Математика в школе». – 2006. – № 4. – с. 45-49.
16. Шарыгин И.Ф. Решение задач. Пособие для 10 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 1994. – 252 с.
17. Шарыгин И.Ф. Геометрия 9-11 кл. От учебной задачи к творческой: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 1996. – 400 с.
18. Энциклопедический словарь юного математика// Сост. Савин А.П. –
М.: Педагогика, 1985. – 352 с.
19. Энциклопедия. Т.11. Математика. – М.: Аванта +, 2000. – 688 с.

Приложение

ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ РЕШАЮТСЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРЕМЫ ВАРИНЬОНА.

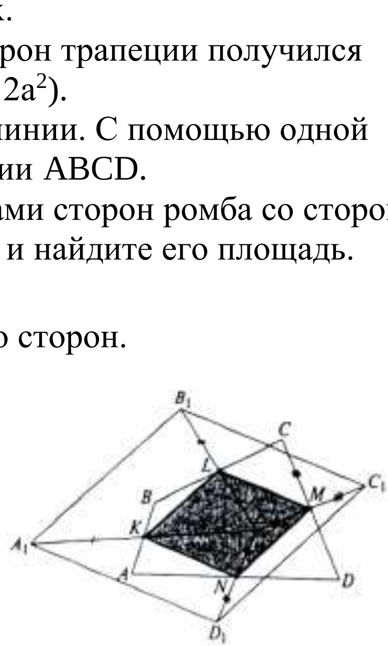
Задача 1. В выпуклом шестиугольнике середины сторон соединены через одну. Доказать, что центры тяжести двух образовавшихся треугольников совпадают.

Задача 2. Докажите, что периметр параллелограмма Вариньона равен сумме длин диагоналей четырёхугольника ABCD.

Задача 3. Докажите, что средние линии четырёхугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
Задача 4. Верно ли, что можно составить треугольник из любой средней линии четырёхугольника и отрезков, вдвое меньших его диагоналей? (Ответ: верно).
Задача 5. Средние линии четырёхугольника ABCD равны a и b, а угол между ними 60°. Найдите диагонали четырёхугольника. (Ответ: $\sqrt{a^2+b^2-ab}$; $\sqrt{a^2+b^2+ab}$).
Задача 6. Постройте ромб с вершинами на сторонах прямоугольника ABCD.
Задача 7. Докажите, что сумма квадратов диагоналей четырёхугольника в два раза больше суммы квадратов его средних линий.
Задача 8. Докажите, что площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади четырёхугольника ABCD.
Задача 9. Докажите, что все четырёхугольники, имеющие общие середины сторон, равновелики.
Задача 10. Докажите, что площадь четырёхугольника равна произведению средней линии на одну из диагоналей и на синус угла между ними.
Задача 11. Докажите, что если диагонали четырёхугольника равны, то его площадь равна произведению средних линий.
Задача 12. В четырёхугольник ABCD вписывают всевозможные параллелограммы, стороны которых параллельны диагоналям четырёхугольника. Какой из этих параллелограммов имеет наибольшую площадь? (Ответ: параллелограмм Вариньона).
Задача 13. Внутри четырёхугольника ABCD, имеющего площадь S, берётся точка E и отражается относительно середин всех его сторон. Получается новый четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $SA_1B_1C_1D_1=2S$.
Задача 14. В четырёхугольнике ABCD отмечены точки E и F – середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что $S_{ELFN}<1/2\ S_{ABCD}$
Задача 15. Докажите, что средние линии четырёхугольника ABCD и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
Задача 16. Докажите, что сумма квадратов сторон четырёхугольника равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учетверённым квадратом отрезка, соединяющего середины диагоналей.
Задача 17. Восстановите пятиугольник по серединам его сторон.
Задача 18. Постройте трапецию по диагоналям, одному из углов и отрезку, соединяющему середины оснований.
Задача 19. Восстановите параллелограмм по серединам его сторон.
Задача 20. Докажите, что точка пересечения средних линий четырёхугольника есть центроид системы четырёх точек, лежащих в его вершинах.
Задача 21. При последовательном соединении середин сторон трапеции получился квадрат со стороной a. Найдите площадь трапеции (Ответ: $2a^2$).
Задача 22. Даны трапеция ABCD и точка E на её средней линии. С помощью одной линейки постройте параллелограмм Вариньона для трапеции ABCD.
Задача 23. Вершины четырёхугольника являются серединами сторон ромба со стороной, равной 4, и углом 120°. Определите вид четырёхугольника и найдите его площадь. (S= $4\sqrt{3}$).
Задача 24. Восстановите (2n+1)-угольник по серединам его сторон.

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ.

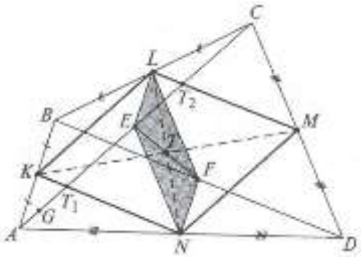
Задача 13. Внутри четырёхугольника ABCD, имеющего площадь S, берётся точка E и отражается относительно



середин всех его сторон. Получается новый четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $SA_1B_1C_1D_1=2S$.

Доказательство: стороны параллелограмма Вариньона и параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ соответственно параллельны (рис. 16), $KL=1/2\ A_1B_1$, $KN=1/2\ A_1D_1$ (по свойству средней линии треугольника), тогда $S_{A_1B_1C_1D_1}=4S_{KLMN}=2S_{ABCD}=2S$.

Задача 14. В четырёхугольнике ABCD отмечены точки E и F – середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что $S_{ELFN}<1/2\ S_{ABCD}$.



Доказательство: так как $S_{KLMN}=1/2\ S_{ABCD}$, достаточно доказать, что точки E и F находятся строго внутри параллелограмма KLMN.

Очевидно, что $TT_1=KL=1/2\ AC$ и $AE=EC=1/2\ AC$. Допустим, что точка E совпадает с G и находится вне KLMN, тогда $GC=1/2\ AC>T_1T_2$, но это противоречит равенству $T_1T_2=1/2\ AC$. Если же точка E совпадает с T_1, то $T_1C=1/2\ AC=T_1T_2$, чего так же быть не может. Значит, точка E находится внутри параллелограмма Вариньона. Аналогично можно показать, что и точка F находится внутри KLMN. Тогда $S_{ELFN}<S_{KLMN}=1/2\ S_{ABCD}$.

Задача 15. Докажите, что средние линии четырёхугольника ABCD и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Доказательство: заметим, что отрезок LN является диагональю и в параллелограмме Вариньона, и в параллелограмме ELFN (см. рис. к задаче 18). Пусть точка T—середина диагонали LN, тогда в этой точке пересекаются отрезки LN и KM, а также LN и EF и каждый из них, будучи диагональю параллелограмма, делится точкой T пополам. Утверждение доказано.

Задача 21. При последовательном соединении середин сторон трапеции получился квадрат со стороной a. Найдите площадь трапеции.

Решение: четырёхугольник KLMN-параллелограмм Вариньона (квадрат). $(AD+BC)/2=KM$ (средняя линия трапеции). Треугольник KLM прямоугольник $KM=\sqrt{2KL^2}=a\sqrt{2}$. $KM||AD||BC$, и $LN\perp KM$ диагонали квадрата, следовательно, $LN\perp AD$, LN—высота трапеции. Площадь ABCD равна $2a^2$. Ответ: $2a^2$

Задача 23. Вершины четырёхугольника являются серединами сторон ромба со стороной, равной 4, и углом 120˚. Определите вид четырёхугольника и его площадь.

Решение: Параллелограмм Вариньона KLMN—прямоугольник, так как диагонали ромба AC и BD пересекаются под прямым углом, а значит и параллельные им стороны KN и KL. $S_{KLMN}=1/2\ S_{ABCD}$ (см. задачу 5). $S_{KLMN}=1/2\ AB^2 \sin\angle ABC$. Площадь KLMN равна $4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$